schon gezeigt: Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ gilt:

$$(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f)\big|_{S^n} = \Delta^{S^n}(f|_{S^n}) - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\Big|_{S^n} - n\frac{\partial f}{\partial r}$$

Sei H ein homogenes Polynom vom Grad k auf $\mathbb{R}^{n+1}$

d.h. $H(x) = H(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_r} \, x_{i_1}^{n_{i_1}} \cdots x_{i_r}^{n_{i_r}}$

mit $n_{i_1} + \dots + n_{i_r} = k$ $\qquad (x_0, \dots, x_n)$ Koordinaten auf $\mathbb{R}^{n+1}$

äquivalent: H ist ein Polynom auf $\mathbb{R}^{n+1}$ mit: $H(\mu x) = \mu^k H(x)$

Bemerkungen:
- Die homogenen Polynome auf $\mathbb{R}^{n+1}$ bilden einen Vektorraum $\mathcal{P}_k$ mit
$$\dim \mathcal{P}_k = \binom{n+k}{k}$$
- $\mathcal{P}_k = \mathrm{Sym}^k \mathbb{R}^{n+1}$ (dazu später mehr)
- $\mathcal{P}_0 \cong \mathbb{R}$ konstante Funktionen
- $\mathcal{P}_1 \cong \mathbb{R}^{n+1}$ lineare Funktionen: $H(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$
- $\Delta(\mathcal{P}_k) \subset \mathcal{P}_{k-2}$

Lemma: Sei H ein homogenes Polynom vom Grad k auf $\mathbb{R}^{n+1}$.
Dann gilt:

(i) $\dfrac{\partial H}{\partial r} = k \cdot r^{k-1} \, H|_{S^n}$ $\qquad H|_{S^n}(x) = H\left(\frac{x}{|x|}\right)$, $x \neq 0$

(ii) $\dfrac{\partial^2 H}{\partial r^2} = k(k-1)\, r^{k-2} \, H|_{S^n}$

Beweis: $H(x) = r^k \, H\left(\frac{x}{|x|}\right)$ $\qquad r = r(x) = |x|$

$\Rightarrow \dfrac{\partial H}{\partial r} = k \cdot r^{k-1} \, H|_{S^n}$

$\dfrac{\partial^2 H}{\partial r^2} = k(k-1)\, r^{k-2} \, H|_{S^n}$

$$\Rightarrow \quad \Delta^{S^n}(H|_{S^n}) = (\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} H)_{S^n} + \frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\Big|_{S^n} + \frac{\partial H}{\partial r}\Big|_{S^n}$$

$$= (\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} H)_{S^n} + k(n+k-1)\,(H|_{S^n})$$

<u>Folgerung</u>: Sei H ein harmonisches homogenes Polynom vom Grad k auf $\mathbb{R}^{n+1}$, dann gilt:

$$\Delta^{S^n}(H|_{S^n}) = k(n+k-1)\,H|_{S^n}$$

<u>Bezeichnungen</u>:

- $\mathcal{H}_k$ = VR der harmonischen, homogenen Polynome vom Grad k auf $\mathbb{R}^{n+1}$
- $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $\tilde{f} := f|_{S^n} \in C^\infty(S^n)$
  und $\tilde{\mathcal{H}}_k = \{ \tilde{f} \mid f \in \mathcal{H}_k \}$
  $\tilde{\mathcal{P}}_k = \{ \tilde{f} \mid f \in \mathcal{P}_k \}$
- Man definiert ein Skalarprodukt auf $\mathcal{P}_k$:
  $$\langle P, Q \rangle := \int_{S^n} \tilde{P} \cdot \tilde{Q} \ \mathrm{vol} \quad , \qquad P, Q \in \mathcal{P}_k$$

<u>Bemerkung</u>: $\mathcal{H}_k$ ist ein endlich-dimensionaler VR

<u>Satz</u>: Die Räume $\tilde{\mathcal{H}}_k$ sind die Eigenräume des Funktionen-Laplace-Operators auf S^n zu den Eigenwerten

$$\lambda_k = k(n+k-1)$$

$$\mathrm{Spec}(S^n, g_0) = \{ k(n+k-1) \mid k = 0, 1, \ldots \}$$

Beweis später

<u>Bemerkung</u>:

- g_0 sei die von der Standardmetrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierte Metrik auf S^n
  $$\Rightarrow \ \mathrm{scal}_{g_0} = n(n-1) \ , \quad \mathrm{Ric} = (n-1)g \ , \quad K = 1$$
- $g = c \cdot g_0$, $c > 0$ $\quad \to \quad \mathrm{scal}_g = \frac{1}{c}\,\mathrm{scal}_{g_0} = \frac{n(n-1)}{c}$
  $$\Delta_g = \frac{1}{c}\,\Delta_{g_0}$$
  Sei λ EW von Δ_{g_0} $\to$ $\frac{1}{c}\lambda$ ist EW von Δ_g

<u>Insbesondere</u>:

$$\lambda_1 = \frac{n}{c} = \frac{\mathrm{scal}}{n-1}$$

Lemma: Der Raum $\mathcal{P}_k$ der homogenen Polynome vom Grad k auf $\mathbb{R}^{n+1}$ hat folgende orthogonale Zerlegung

$$\mathcal{P}_{2k} = \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2 \mathcal{H}_{2k-2} \oplus \dots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_0$$

$$\mathcal{P}_{2k+1} = \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2 \mathcal{H}_{2k-1} \oplus \dots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_1$$

Beweis: mit vollständiger Induktion

- $\mathcal{P}_0 = \mathcal{H}_0$ da konstante und lineare Funktionen harmonisch sind — I.A
  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{H}_1$

- für $k \geq 0$ sei $\mathcal{P}_k = \mathcal{H}_k \oplus r^2 \mathcal{P}_{k-2}$ — I.Vor

ZZ $\mathcal{P}_{k+2} = \mathcal{H}_{k+2} \oplus r^2 \mathcal{P}_k$

schon gesehen: $\tilde{\mathcal{H}}_{k+2} \subset E_{\lambda_{k+2}}$ auf S^n

nach I.Vor.: $\mathcal{P}_k \subset \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_k}$

$\Rightarrow \mathcal{H}_{k+2} \perp \mathcal{P}_k$ da $E_\lambda \perp E_\mu$ für $\lambda \neq \mu$

$\Rightarrow \mathcal{H}_{k+2} \oplus r^2 \mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}_{k+2}$ (also direkte, orthog. Summe)

umgekehrte Inklusion:

$p \in \mathcal{P}_{k+2}$, $p \perp \mathcal{P}_k$ ZZ $p \in \mathcal{H}_{k+2}$

$\Rightarrow \Delta p \in \mathcal{P}_k = \mathcal{H}_k \oplus r^2 \mathcal{H}_{k-2} \oplus \dots$

d.h. p ist harmonisch genau dann, wenn

$$\Delta p \perp r^{2l} \mathcal{H}_{k-2l} \qquad 0 \leq 2l \leq k$$

d.h. genau dann, wenn

$$\widetilde{\Delta p} \perp \tilde{\mathcal{H}}_{k-2l} \qquad 0 \leq 2l \leq k$$

wie schon gezeigt: $\Delta \tilde{p} = \widetilde{\Delta p} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + n \frac{\partial p}{\partial r} = \widetilde{\Delta p} + \lambda_{k+2} \tilde{p}$

Sei H ein harmonisches, homogenes Polynom vom Grad $k-2l$

$$\rightarrow (\widetilde{\Delta p}, \tilde{H}) = (\Delta \tilde{p}, \tilde{H}) - \lambda_{k+2} (\tilde{p}, \tilde{H})$$
$$= (\tilde{p}, \Delta \tilde{H}) - \lambda_{k+2} (\tilde{p}, \tilde{H})$$
$$= (\lambda_{k-2l} - \lambda_{k+2})(\tilde{p}, \tilde{H}) = 0 \quad \text{da } \tilde{p} \perp \tilde{\mathcal{P}}_k$$

$\rightarrow p \in \mathcal{H}_{k+2}$ $\rightarrow$ andere Inklusion

Beweis des Satzes

schon gezeigt: $\tilde{\mathcal{H}}_k$ sind Eigenräume.

noch zu zeigen: $\bigoplus_k \tilde{\mathcal{H}}_k \subset C^\infty(S^n)$ dicht

- jedes homogene Polynom ist eine Linearkombination aus harmonischen, homogenen Polynomen (nach Lemma)
- nach Stone-Weierstrass liegen die homogenen Polynome dicht in $C^\infty(S^n)$

$$\Rightarrow \quad \bigoplus_{k\geq 0} \tilde{\mathcal{H}}_k = \bigoplus_{k \geq 0} \tilde{\mathcal{P}}_k \subset C^\infty(S^n) \quad \text{dicht}$$

Bemerkung: Die Multiplizität der Eigenwerte λ_k, also die Dimension der Eigenräume $\tilde{\mathcal{H}}_k$ berechnet sich nach dem Lemma als:

$$\dim \tilde{\mathcal{H}}_k = \dim \mathcal{P}_k - \dim \mathcal{P}_{k-2}$$

$$= \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{k-2}$$

Sei $V = \mathbb{R}^{n+1}$ mit euklidische Metrik g

$\mathrm{Sym}^k V$ = Raum der symmetrischen k-Tensoren auf V

$K: \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k\text{-mal}} \to \mathbb{R}$ multilinear und symmetrisch

<u>Elemente in V:</u> $v_1 \cdot \ldots \cdot v_k$ symmetrisches Produkt

$$(v_1 \cdot \ldots \cdot v_k)(x_1, \ldots x_k) := \sum_{\sigma \in S_n} g(v_1, x_{\sigma(1)}) \cdots g(v_k, x_{\sigma(k)})$$

z.B.: $g \in \mathrm{Sym}^2 V$, $g = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2$ $\{e_i\}$ ONB in V

<u>Kontraktion:</u>

$$\Lambda : \mathrm{Sym}^k V \longrightarrow \mathrm{Sym}^{k-2} V$$

$$\Lambda K := \sum_i e_i \lrcorner\, e_i \lrcorner\, K$$

wobei $(v \lrcorner K)(x_1, \ldots, x_{k-1}) := K(v, x_1, \ldots, x_{k-1})$

z.B. $K \in \mathrm{Sym}^2 V$,

$\to \Lambda K = \mathrm{Tr}\, K$

<u>Definition:</u> $\mathrm{Sym}^k_0 V = \mathrm{Ker}(\Lambda : \mathrm{Sym}^k V \longrightarrow \mathrm{Sym}^{k-2} V)$

ist der Raum der spurfreien symmetrischen Tensoren

<u>Identifikationen:</u>

$$\mathrm{Sym}^k V \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_k \subset C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$$

$$K \mapsto \hat{K}, \quad \hat{K}(x) = K(x, \ldots, x), \; x \in \mathbb{R}^{n+1}$$

<u>Lemma:</u> ① $\widehat{v \lrcorner K} = \frac{1}{k} v(\hat{K})$ $v \in V$, $K \in \mathrm{Sym}^k V$

② $\widehat{\Lambda K} = -\frac{1}{k^2} \Delta \hat{K}$

<u>Beweis:</u> $(v(\hat{K}))(x) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \hat{K}(\gamma(t))$ $\gamma(t) = x + tv$

$= \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \left(K(\gamma(t), \ldots, \gamma(t)) \right)$

$= K(v, x, \ldots, x) + \ldots + K(x, \ldots, x, v) = k \cdot (v \lrcorner K)(x, \ldots x)$

Folgerung: $\mathrm{Sym}^k_\circ V \cong \mathcal{H}_k$

Bemerkung: Auf $\mathrm{Sym}^k V$ hat man eine Darstellung der Gruppe $O(n+1)$. Man definiert:

$$(gK)(x_1, \dots, x_k) := K(g^{-1}x_1, \dots, g^{-1}x_k)$$

oder äquivalent:

$$g \cdot (v_1 \circ \dots \circ v_k) = (gv_1) \circ \dots \circ (gv_k)$$

Satz: ① $\mathrm{Sym}^k_\circ V$ ist eine irreduzible $O(n+1)$-Darstellung

② Man hat folgende Zerlegung in irreduzible Summanden:

$$\mathrm{Sym}^k V = \mathrm{Sym}^k_\circ V \oplus \mathrm{Sym}^{k-2}_\circ V \oplus \dots$$

Die Einbettung $\mathrm{Sym}^{k-2r}_\circ V \to \mathrm{Sym}^k V$ ist gegeben durch die Abbildung:

$$K \mapsto g^r \cdot K \qquad K \in \mathrm{Sym}^{k-2r}_\circ V$$